

## 4. Скупови мере нула

Скупови мере нула су при интеграцији занемарљиви у следећем смислу: ако је  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  интегрална у односу на меру  $\mu$  и ако је  $N$  мерљив скуп,  $\mu(N) = 0$ , онда је  $\int_N f d\mu = 0$ . За позитивне функције је то већ доказано, а за комплексне то следи из дефиниције и разлагања  $f = f_{\Re}^+ - f_{\Re}^- + if_{\Im}^+ - if_{\Im}^-$ . То нас мотивише да уведемо следећу дефиницију.

**Дефиниција 4.8.** Нека је  $P$  особина коју тачка  $x \in X$  може имати. Кажемо да је својство  $P$  испуњено **скоро свуда** на мерљивом скупу  $A$  у односу на меру  $\mu$  ако постоји скуп  $N \in \mathfrak{M}$  такав да је  $\mu(N) = 0$  и да свака тачка  $x \in A \setminus N$  има својство  $P$ .

Када је потребно нагласити меру  $\mu$  кажемо:  $P$  важи скоро свуда на  $A$  у односу на меру  $\mu$  или краће  $[\mu]$  с.с. на  $A$ . У случају комплетне мере  $\mu$  горњи услов се своди на исказ да је скуп тачака  $x \in A$  у којима  $P$  није испуњено скуп мере нула. Ако не спомињемо скуп  $A$ , онда подразумевамо да је  $A = X$ .

Својства која се често јављају су:  $f(x) > 0$  за задану функцију  $f$ ; низ  $f_n(x)$  конвергира, где је  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  дати низ функција на  $X$  и.т.д.

Уведемо релацију еквиваленције  $\sim$  у векторски простор свих комплексних мерљивих функција на  $X$ :

$f \sim g$  ако и само ако је  $f(x) = g(x)$  за  $[\mu]$  с.с.  $x \in X$ .

Да је  $\sim$  релација еквиваленције следи из чињенице да је унија два скупа мере нула скуп мере нула: ако је  $f = g$  ван  $N_1$ ,  $\mu(N_1) = 0$ , а  $g = h$  ван  $N_2$ ,  $\mu(N_2) = 0$ , онда је  $f = h$  ван  $N = N_1 \cup N_2$ , где је  $\mu(N) = 0$ . Рефлексивност и симетричност релације  $\sim$  су очите.

Остављамо читаоцу да провери да је ова релација еквиваленције сагласна са алгебарским операцијама, поретком и граничним процесима, наиме да докаже следећа тврђења

ако је  $f_1 \sim f_2$  и  $g_1 \sim g_2$ , онда је  $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ ;

ако је  $f_1 \sim f_2$ ,  $g_1 \sim g_2$  и  $f_1 \leq g_1$  скоро свуда, онда је  $f_2 \leq g_2$  скоро свуда;

ако је  $f_n \sim g_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  постоји  $[\mu]$  с.с., онда и  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$  постоји  $[\mu]$  с.с. и при томе је  $f = g$  такође  $[\mu]$  с.с.



Горња тврђења, као и њима аналогна ћемо користити без посебног наглашавања. Приметили смо да је релација  $\sim$  сагласна и са интеграцијом, за сваки мерљив скуп  $A \subset X$ .

**ЛЕМА 4.23. [о анулирању интеграла]** Нека је  $f$  комплексна интегрална функција и нека је  $\int_E f d\mu = 0$  за сваки мерљив скуп  $E$ . Тада је  $f = 0$  скоро свуда.

$\Delta$  Нека је  $f = f_{\Re} + if_{\Im}$  и нека је  $E = f_{\Re}^{-1}((0, +\infty)) = \{x \in X : f_{\Re}(x) > 0\}$ . Имамо  $\int_E f_{\Re}^+ d\mu = \int_E f_{\Re} d\mu = \Re \int_E f d\mu = 0$ . Како је  $f_{\Re}^+$  строго позитивна функција на овако изабраном скупу  $E$ , следи да је  $\mu(E) = 0$ . Дакле,  $f_{\Re} \leq 0$  скоро свуда, слично се доказује да је  $f_{\Re} \geq 0$  с.с., па је  $f_{\Re} = 0$  с.с. Аналогно је  $f_{\Im} = 0$  с.с., па је  $f = 0$  скоро свуда.  $\square$

**ЛЕМА 4.24. [о средњим вредностима]** Нека је  $f$  комплексна интегрална функција на простору  $X$  са коначном мером  $\mu$ . Претпоставимо да за сваки мерљив скуп  $E$  строго позитивне мере средња вредност

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$$

функције  $f$  на скупу  $E$  припада завореном подскупу  $C$  комплексне равни. Тада  $f(x) \in C$  за  $[\mu]$  скоро свако  $x \in X$ .

$\Delta$  Отворен скуп  $V = \mathbb{C} \setminus C$  се може представити као пребројива унија отворених дискова (кругова)  $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}(z_n, r_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_n| < r_n\}$ . Скупови  $E_n = f^{-1}(D_n)$  су мерљиви као инверзне слике отворених скупова, претпоставимо да је  $\mu(E_n) > 0$  за неко  $n \in \mathbb{N}$ . Тада је

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} f d\mu - z_n \right| &= \left| \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} (f(x) - z_n) d\mu(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} |f(x) - z_n| d\mu(x) < r_n, \end{aligned}$$

при чему је последња неједнакост строга. Наиме, на скупу  $E_n$  који је строго позитивне мере важи  $r_n - |f(x) - z_n| > 0$ , па на основу става 4.15 б) важи  $\int_{E_n} (r_n - |f(x) - z_n|) d\mu > 0$  односно  $\int_{E_n} |f(x) - z_n| d\mu < r_n \mu(E_n)$ . Горња неједнакост показује да средња вредност функције  $f$  на  $E_n$  припада  $D_n = \mathbb{D}(z_n, r_n)$ , што је контрадикција јер  $D_n \cap C = \emptyset$ . Дакле,  $\mu(E_n) = 0$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ , па је  $\mu(f^{-1}(V)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$ . Следи да  $f(x) \in C$  за  $[\mu]$  с.с.  $x \in X$ .  $\square$

Корисно је уопштити појам мерљивости на функције које су дефинисане скоро свуда.

**ДЕФИНИЦИЈА 4.9.** За функцију  $f$ , дефинисану на мерљивом скупу  $E$  таквом да је  $\mu(E^c) = 0$ , која узима вредности у  $\mathbb{C}$  или  $\overline{\mathbb{R}}$ , кажемо да је мерљива



на  $X$  ако је  $f^{-1}(V) = \{x \in E : f(x) \in V\}$  мерљив скуп за сваки отворен скуп  $V$  у  $\mathbb{C}$ , односно у  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Ако такву функцију продужимо на читав простор  $X$  до функције  $\tilde{f}$  тако што дефинишемо  $\tilde{f}(x) = c$  за  $x \notin E$ , где је  $c$  константа (на пример  $c = 0$ ), онда добијамо функцију која је мерљива у старом смислу, јер је тада скуп  $\tilde{f}^{-1}(V)$  једнак или  $f^{-1}(V)$  (ако је  $c \notin V$ ) или  $f^{-1}(V) \cup E^c$  (ако је  $c \in V$ ). Ако је мера  $\mu$  комплетна, онда можемо  $f$  потпуно произвољно продужити на  $E^c$ , тиме свакако добијамо мерљиву функцију на читавом простору  $X$ .

Из горњег следи да интеграл  $\int_A \tilde{f} d\mu$ , ако постоји, не зависи од избора константе  $c$  тако да можемо тада коректно дефинисати  $\int_A f d\mu$ .

Илуструјмо горња разматрања на случају простора  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ , где је  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{M}$  је сигма алгебра свих подскупова од  $\mathbb{N}$ , а  $\mu$  је бројачка мера на  $\mathbb{N}$ . Пре свега тада сваку функцију  $x : \mathbb{N} \rightarrow Y$  можемо идентификовати са низом  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  у простору  $Y$ , где је  $Y = \overline{\mathbb{R}}$  или  $Y = \mathbb{C}$ . Затим, свака таква функција је мерљива. С обзиром да је сваки непразан подскуп од  $\mathbb{N}$  строго позитивне мере, следи да су две функције на  $\mathbb{N}$  једнаке свуда ако су једнаке скоро свуда. Дакле, у том случају се релација еквиваленције "скоро свуда" своди на обичну једнакост.

Нека је сада  $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  низ позитивних реалних бројева. Тада је  $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ , где је  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$  задано формулом  $f_n(k) = 0$  за  $k \neq n$ ,  $f_n(n) = x_n$ . Функције  $f_n$  су прости позитивне и очито је  $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = x_n$ , па је на основу Верро Levi-јевог става  $\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ . Дакле, интеграција по  $\mathbb{N}$  у односу на бројачку меру се своди на сумирање реда. Исто наравно важи и ако је  $z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  интегралбилна комплексна функција на  $\mathbb{N}$ , довољно је разложити  $z$  на реалан и имагинаран део:  $z_n = x_n + iy_n$ , а потом разложити  $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  на позитиван и негативан део:  $x = \{x_n^+ - x_n^-\}_{n=1}^{\infty}$  и  $y = \{y_n^+ - y_n^-\}_{n=1}^{\infty}$  и применити доказано. Услов интегралбилности низа  $z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  је апсолутна конвергенција реда  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ .



# Odnos Rimanovog i Lebegovog integrala

## 7.1 Odnos Rimanovog i Lebegovog integrala

U ovom odeljku posmatramo skup  $\mathbf{R}$  sa Lebegovom  $\sigma$ -algebrom  $\mathcal{L}$  i Lebegovom merom  $m$ . Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ograničena (sa  $A > 0$ ) merljiva funkcija, ona je i Lebeg-integrabilna, što sledi iz  $\int_{[a,b]} |f| dm \leq A \int_{[a,b]} dm = A(b-a)$ . Pokazaćemo da ako je  $f$  realna ograničena funkcija na  $[a, b]$  i ako je Riman-integrabilna, onda je ona merljiva i Lebeg-integrabilna na  $[a, b]$ .

**Teorema 7.1.** Neka je  $f$  ograničena realna funkcija na  $[a, b]$ .



1) Ako je  $f$  Riman integrabilna, tada je  $f$  Lebeg integrabilna i važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

2) Funkcija  $f$  je Riman integrabilna, ako i samo ako je skup prekida funkcije  $f$  mere 0.

**Dokaz:** Neka je  $P(n)$  podela intervala  $[a, b]$  data sa:

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, \dots, n,$$

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$g_{P(n)} = \sum_{k=1}^n m_k \kappa_{[x_{k-1}, x_k]}, \quad G_{P(n)} = \sum_{k=1}^n M_k \kappa_{[x_{k-1}, x_k]},$$

$$s_{P(n)} = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}), \quad S_{P(n)} = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Neka se podele  $P(n)$  profinjaju kad  $n \in \mathbf{N}$ , raste. Sledi

$$g_{P(n)} \leq g_{P(n+1)} \leq f \leq G_{P(n+1)} \leq G_{P(n)}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (7.1)$$

Neka je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{P(n)}(x) = g(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_{P(n)}(x) = G(x), \quad x \in [a, b].$$

Navedeni limesi postoje na osnovu (7.1) Jasno,  $g$  i  $G$  su merljive i važi  $g \leq f \leq G$ . Koristićemo sledeće jednostavne jednakosti:

$$s_{P(n)} = \int_a^b g_{P(n)}(x)dx = \int_{[a,b]} g_{P(n)} dm, \quad (7.2)$$

$$S_{P(n)} = \int_a^b G_{P(n)}(x)dx = \int_{[a,b]} G_{P(n)} dm. \quad (7.3)$$

Iz (7.1), na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\int_{[a,b]} g_{P(n)} dm \rightarrow \int_{[a,b]} g dm, \quad \int_{[a,b]} G_{P(n)} dm \rightarrow \int_{[a,b]} G dm.$$



Kako je  $f$  Riman integrabilna, na osnovu (7.2) i (7.3) sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} gdm = \int_{[a,b]} Gdm.$$

Kako je  $g \leq G$ , i  $\int_{[a,b]} (G-g)dm = 0$ , na osnovu Teoreme 5.4 sledi  $G = g$  (s.s.).  
Iz (7.1) sledi  $G = f$  (s.s.).

2) Neka je  $f$  Riman integrabilna.

Ako je  $f$  Riman integrabilna, na osnovu (7.1) važi  $G = g$  (s.s.) pa je  $f = G = g$  (s.s.).

Funkcija  $f$  je neprekidna u tački  $t \in [a, b]$  ako i samo ako je  $g(t) = G(t)$  (videti Zadatak 7.2). Kako je  $G - g = 0$  (s.s.) sledi da je skup prekida funkcije  $f$  mere 0.

Obrnuto, neka je  $g = G = f$  (s.s.). Kako su  $g$  i  $G$  merljive,  $f$  s.s. jednaka sa njima i mera  $m$  kompletna, sledi da je i  $f$  merljiva funkcija.

Sada iz  $g = G$  (s.s.) sledi

$$\int_{[a,b]} gdm = \int_{[a,b]} Gdm$$

te je Rimanov integral  $\int_a^b f(x)dx$  definisan i jednak je sa  $\int_{[a,b]} gdm$ . ■

**Primer 7.1.** Neka je  $f = \kappa_{(0,1) \cap \mathbb{Q}}$ . Ovo je primer funkcije koja je Lebeg-integrabilna, ali nije Riman-integrabilna, jer je svaka tačka iz  $(0, 1)$  tačka prekida. Lebegov integral je jednak sa  $\int_{(0,1)} f dm = 1 \cdot m(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) + 0 \cdot m(\mathbb{Q}^c \cap (0, 1)) = 0$ , jer je skup racionalnih brojeva mere nula.

**Primer 7.2.** Neka je  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Tada je nesvojstveni Rimanov integral konvergentan i važi

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

ali Lebegov integral  $\int_{[0,\infty)} f dm$  ne postoji jer je

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Zaista, za proizvoljno  $M \in \mathbb{N}$  važi

$$\begin{aligned} \int_\pi^{(M+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{k=1}^M \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^M \int_0^\pi \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi} dt \\ &= \sum_{k=1}^M \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k\pi} dt \geq \sum_{k=1}^M \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^M \frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$



pa je i  $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1} = \infty$ .

Takođe, možemo videti i da je  $f_+ = f \cdot \kappa_P$ , gde je  $P = \bigcup_{m \in \mathbf{N}, k=2m} [k\pi, (k+1)\pi]$ , i  $f_- = f \cdot \kappa_N$ , gde je  $N = \bigcup_{m \in \mathbf{N}, k=2m-1} [k\pi, (k+1)\pi]$ . Sličnim rezonovanjem kao i malopre dobijamo da je  $\int_0^\infty f_+(x) dx = \sum_{m=1, k=2m}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \infty$  i  $\int_0^\infty f_-(x) dx = \infty$ , pa integral nije definisan ni u proširenom smislu.

**Primer 7.3.** Neka je  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \kappa_{[n, n+1)}(x)$ . Tada nesvojstveni Rimanov integral postoji jer je  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} < \infty$ , ali  $f \notin L^1(m)$  jer je  $\int_{\mathbf{R}} |f| dm = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = \infty$ . To smo mogli zaključiti i na osnovu činjenice da je  $\int_{\mathbf{R}} f_+ dm = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2k+1} = \infty$ ,  $\int_{\mathbf{R}} f_- dm = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2k+2} = \infty$ , te izraz  $\int_{\mathbf{R}} f dm = \int_{\mathbf{R}} f_+ dm - \int_{\mathbf{R}} f_- dm$  nije definisan.

Prethodni primeri ukazuju na *apsolutnu* prirodu Lebegovog integrala tj.  $f \in L^1(m)$  ako i samo ako  $\int_{\mathbf{R}} |f| dm < \infty$ . Naredna teorema pokazuje da ako je neka merljiva funkcija nenegativna i postoji njen Rimanov nesvojstveni integral, tada postoji i Lebegov nesvojstveni integral i oni su međusobno jednaki.

**Teorema 7.2.** Neka je  $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  merljiva funkcija za koju postoji Rimanov nesvojstveni integral  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx < \infty$ . Tada postoji i Lebegov integral  $\int_{\mathbf{R}} f dm$  i važi

$$\int_{\mathbf{R}} f dm = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx.$$

**Dokaz:** Posmatrajmo niz funkcija  $f_n = f \cdot \kappa_{[-n, n]}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . To je rastući niz merljivih funkcija za koji važi  $f_n \nearrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Na ograničenom intervalu  $[-n, n]$  se Rimanov i Lebegov integral poklapaju na osnovu Teoreme 7.1 pa je

$$\int_{-n}^n f(x) dx = \int_{-n}^n f_n(x) dx = \int_{[-n, n]} f_n dm = \int_{[-n, n]} f dm. \quad (7.4)$$

Na osnovu uslova zadatka sledi da postoji granična vrednost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx < \infty. \quad (7.5)$$

Na osnovu Lebegove teoreme o monotonij konvergenciji sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm = \int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm = \int_{\mathbf{R}} f dm. \quad (7.6)$$

Iz (7.4), (7.5) i (7.6) sledi da je  $f \in L^1(m)$  i da važi  $\int_{\mathbf{R}} f dm = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ . ■



## 7.2 Razmena limita i integrala

U ovom odeljku razmatramo funkcije definisane preko nekog realnog parametra u integralu. Naredna propozicija utvrđuje dovoljne uslove, pod kojima se može razmeniti redosled limita ili diferencijala i integrala po meri, odnosno Rimanovog integrala i integrala po meri.

**Propozicija 7.1.** Neka je  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  prostor sa  $\sigma$ -algebrom  $\mathcal{M}$  i  $\sigma$ -konačnom kompletnom merom  $\mu$ . Neka je  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  ( $[a, b]$  je interval u  $\mathbf{R}$ ) preslikavanje za koje važi da je funkcija  $f$  merljiva u odnosu na  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{[a, b]}$  i integrabilna za svako  $t \in [a, b]$ .

Definišimo

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x), \quad t \in [a, b].$$

a) Pretpostavimo da postoji  $g \in L^1(\mu)$  tako da važi

$$|f(x, t)| \leq g(x), \quad (x, t) \in X \times [a, b]. \quad (7.7)$$

Ako je  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ , za svako  $x \in X$ ,  $t_0 \in [a, b]$ , tada važi

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

b) Pretpostavimo da  $\frac{\partial f}{\partial t}$  postoji za svako  $t \in [a, b]$ , svako  $x \in X$  i da postoji  $g \in L^1(\mu)$  tako da je

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x), \quad t \in [a, b], \quad x \in X. \quad (7.8)$$

Tada je  $F$  diferencijabilna funkcija na  $[a, b]$  i važi

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t) d\mu.$$

c) Pod istim pretpostavkama kao u a), sledi da je

$$\int_{[a, b]} F(t) dm(t) = \int_X \left( \int_{[a, b]} f(x, t) dm(t) \right) d\mu(x).$$

**Primedba.** U tvrđenju a) uslovi se se mogu zameniti sa:

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &\leq g(x), \quad t \in [a, b], \quad x \in X \quad (\text{s.s.}), \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) &= f(x, t_0), \quad x \in X \quad (\text{s.s.}), \end{aligned}$$



tada važe tvrđenja propozicije pod a) i pod c).

U tvrđenju pod b) možemo da pretpostavimo da  $\frac{\partial f}{\partial t}$  postoji za svako  $t \in [a, b]$  i  $x \in X$  (s.s.) kao i da umesto uslova (7.8) važi

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x), \quad t \in [a, b], \quad x \in X \quad (\text{s.s.}) .$$

Tada tvrđenje pod b) takođe važi.

**Dokaz:** a) Treba dokazati da za svaki niz  $(t_n)_n$  u  $[a, b]$  koji konvergira ka  $t_0$  važi  $F(t_n) \rightarrow F(t_0), t_n \rightarrow t_0$ . Primenom Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji na niz funkcija  $f_n(x) = f(x, t_n), n \in \mathbf{N}, x \in X$ , direktno sledi tvrđenje.

b) Dokaz takođe sledi na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji primenjenoj na niz funkcija  $f_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}, n \in \mathbf{N}, x \in X, t_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty$ .

Koristeći teoremu srednje vrednosti

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \right| \leq \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, \xi) \right| \leq g(x), \quad \xi \in [a, b] \text{ i skoro svako } x \in X,$$

i teoremu dominantne konvergencije, dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t_0) &= \lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \int_X \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\mu \\ &= \int_X \lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\mu = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) d\mu. \end{aligned}$$

c) Posmatrajmo preslikvanje  $h : X \times [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  dato sa

$$h(x, t) = \int_a^t f(x, s) ds.$$

Kako je  $f$  neprekidna na  $[a, b]$  za svako  $x \in X$ , sledi da je  $\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = f(x, t)$ . Kako ovaj Rimanov integral postoji, on je granična vrednost Rimanovih suma, pa je preslikavanje  $x \mapsto h(x, t)$  merljivo za svako  $t \in [a, b]$ . Iz (7.7) sledi da je  $|h(x, t)| \leq g(x)(b-a)$ , pa je funkcija  $x \mapsto h(x, t)$  integrabilna za svako  $t \in [a, b]$ . Definišimo:

$$H(t) = \int_X h(x, t) d\mu.$$

Prema tvrđenju propozicije pod (b) dobijamo:

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) d\mu = \int_X f(x, t) d\mu = F(t).$$



Dakle,

$$\begin{aligned}\int_a^b F(t)dt &= H(b) - H(a) = \int_X (h(x, b) - h(x, a)) d\mu \\ &= \int_X \left( \int_a^b f(x, t)dt \right) d\mu.\end{aligned}$$

■